A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

PPI 2r., sem. letni
LISTA 1

Wrocław, 23 lutego 2006

ZADANIE 1. Sprawdź, że metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^n$ spełnia warunek trójkąta.

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

ZADANIE 2. Sprawdź, że poniższe metryki w przestrzeni funkcji rzeczywistych ciągłych na [0,1] spełniają aksjomat tożsamości i warunek trójkąta.

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx}$$

To zadanie wymaga nierówności Schwarza

ZADANIE 3. Udowodnij poniższe nierówności w dowolnej przestrzeni metrycznej. Wykaż, że każda z nich jest *de facto* równoważna z warunkiem trójkąta.

$$d(x,y) \geq |d(x,z)-d(y,z)|, \qquad |d(x,y)-d(z,v)| \leq d(x,z)+d(y,v)$$

ZADANIE 4. Jak wyglądają kule w przestrzeni funkcji rzeczywistych na Y w metryce supremum

$$d(f,g) = \sup_{y\in Y} |f(y)-g(y)|$$

ZADANIE 5. Wykaż, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni metrycznej jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest każdy jego podciąg.

ZADANIE 6. Wykaż, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni metrycznej jest zbieżny do elementu x wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego podciąg zawiera podciąg zbieżny do x.

ZADANIE 7. Wykaż równoważność defnicji ciągłości funkcji Heinego i Cauchy'ego.

ZADANIE 8. Wykaż, że na przestrzeni z metryką dyskretną każda funkcja o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej jest ciągła.

ZADANIE 9. Wykaż, że ciągłość funkcji jest równoważna z warunkiem, że przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty.

Tomasz Downarowicz